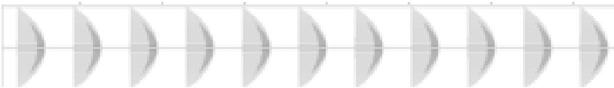
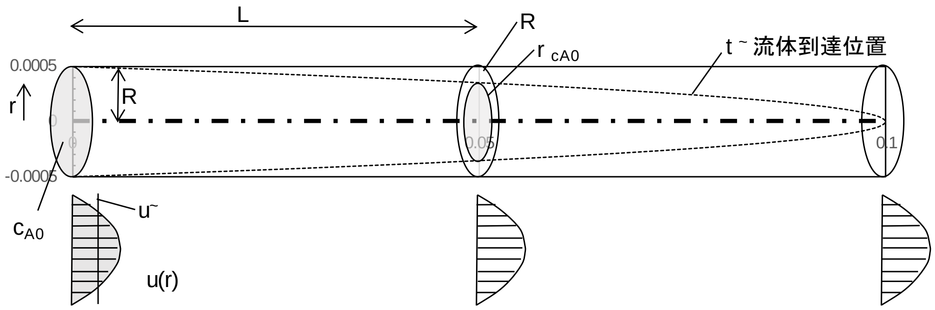
流通装置内の混合

6 層流円管内流れ（放物線速度分布）のステップ応答（LRF モデル）





半径 R, 長さ L の円管内を平均流速 $\bar{u}$， 放物線速度分布 $u(r) = 2\bar{u}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$ の円管内流れがある。平均滞留時間は $\bar{t} = L/\bar{u}$ である。入口流体の A 成分濃度は $t<0$ で $c_\mathrm{A} = 0$ である。$0 \le t$ で入口流体の A 成分濃度を c_A0 にステップ変化させる。濃度拡散はない(D_y=0)ものとして，出口の混合平均濃度の経時変化を求める。これはステップ入力に対する応答（F 曲線）を求める問題である。

一般に混合平均濃度 $\bar{c}_\mathrm{A}$ の定義は濃度と速度の積の断面積分より： $\bar{c}_\mathrm{A} \equiv \dfrac{\int_0^R c_\mathrm{A} u(r)(2\pi r)dr}{\pi R^2 \bar{u}}$

である。この場合は出口において半径 r_cA0 の円内が濃度 $c_\mathrm{A} = c_\mathrm{A0}$ であり，その外側は $c_\mathrm{A} = 0$ なので，

$$\bar{c}_\mathrm{A} \equiv \frac{\int_0^{r\mathrm{cA0}} c_\mathrm{A0} u(r)(2\pi r)dr}{\pi R^2 \bar{u}} \qquad (*)$$

となる。時間 t における入口流体の到達距離は $(u(r)\times t)$ であり，これが L に等しい r が出口断面で A 成分が存在する円の半径 r_cA0 である。

$$2\bar{u}\left[1-\left(\frac{r_\mathrm{cA0}}{R}\right)^2\right]\times t = L = \bar{t}\times\bar{u} \qquad \text{これを解いて，} \quad r_\mathrm{cA0} = R\sqrt{1-\bar{t}/2t}$$

よって，式(*)が次式となる。

$$\frac{\bar{c}_\mathrm{A}}{c_\mathrm{A0}} = \frac{\int_0^{r\mathrm{cA0}} u(r)(2r)dr}{R^2\bar{u}} = \frac{\int_0^{r\mathrm{cA0}} 2\bar{u}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right](2r)dr}{R^2\bar{u}} = \frac{4}{R^2}\int_0^{r\mathrm{cA0}}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]rdr = \frac{4}{R^4}\int_0^{r\mathrm{cA0}}(R^2-r^2)rdr$$

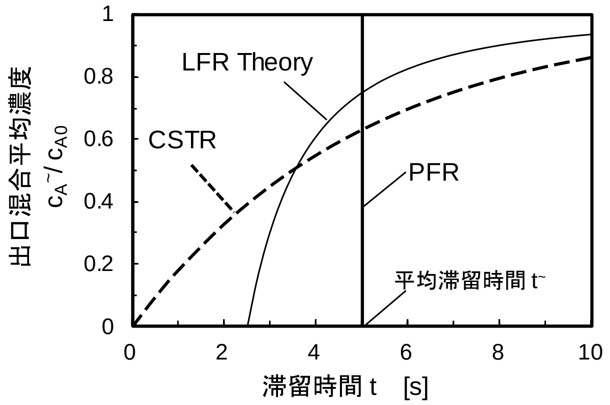
$$= \frac{4}{R^4}\int_0^{r\mathrm{cA0}}(R^2 r - r^3)dr = \frac{4}{R^4}\left[R^2\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^{r\mathrm{cA0}} = \frac{4}{R^4}\left[R^2\frac{1}{2}r_\mathrm{cA0}^2 - \frac{1}{4}r_\mathrm{cA0}^4\right] = 1-\frac{1}{4}\left(\frac{\bar{t}}{t}\right)^2$$

すなわち

$$F(t) = \frac{\bar{c}_\mathrm{A}}{c_\mathrm{A0}} = 1-\frac{1}{4}\left(\frac{\bar{t}}{t}\right)^2$$

となる。（ただし$(\bar{t}/2) \le t$）

以上が LFR(Laminar-flow reactor) theory である。この曲線を下図に示す。PFR の直線と，CSTR の曲線（$\dfrac{\bar{c}_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A0}}} = 1-\exp\left(-\dfrac{t}{\bar{t}}\right)$）と比較した。



（CSTR の曲線は基礎収支式から次式で求められる。）

$$L\frac{dc_{\mathrm{A}}}{dt} = \bar{u}(c_{\mathrm{A0}} - c_{\mathrm{A}}) \quad \rightarrow \bar{t}\,\frac{dc_{\mathrm{A}}}{dt} = (c_{\mathrm{A0}} - c_{\mathrm{A}}) \quad \rightarrow \frac{dc_{\mathrm{A}}}{(c_{\mathrm{A0}} - c_{\mathrm{A}})} = \frac{1}{\bar{t}}dt$$

$$\rightarrow -\left[c_{\mathrm{A0}} - c_{\mathrm{A}}\right]_0^{cA} = \frac{t}{\bar{t}} \quad \rightarrow \ln\left(\frac{c_{\mathrm{A0}} - c_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A0}}}\right) = -\frac{t}{\bar{t}} \rightarrow \left(1 - \frac{c_{\mathrm{A}}}{c_{\mathrm{A0}}}\right) = \exp\left(-\frac{t}{\bar{t}}\right)$$