

第3回 濾過のRuth式

1. 対象とするプロセス：デッドエンド濾過

濾過操作は圧力差により濾材または濾過膜を通して、粒子懸濁液から清澄な濾液を得る簡単な操作である。濾過の進行により膜面にケーキ層が堆積し、それに応じて濾過速度が低下することが特徴である。

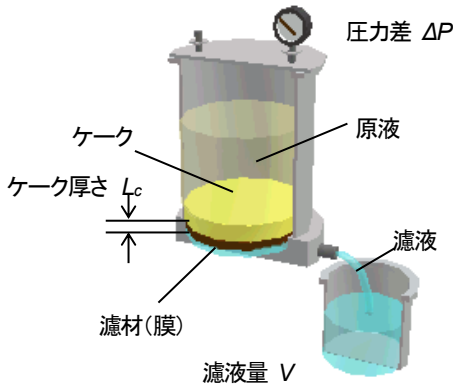


図1 デッドエンド濾過

2. モデル式の作成

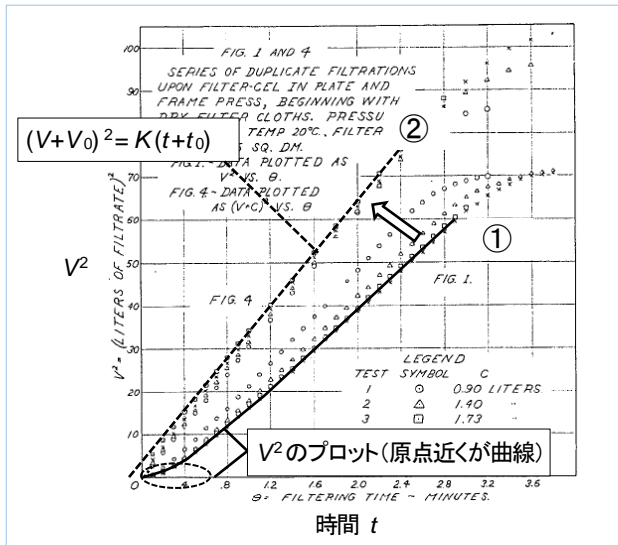


図2 Ruth の原報¹⁾の図

濾過の過程を単純明快にモデル化したのが Ruth の濾過方程式である¹⁾。圧力一定の全量濾過（デッドエンド濾過）を考える。（図1）この操作で濾液の積算量 V の2乗を時間 t に対してプロットするとほぼ直線が得られる。

（図2の①）しかし濾過初期の $t=0$ の近くではこの線が曲がっている。Ruthはこの点に着目し、 V と t のデータを各々 V_0 と t_0 という適当な定数で補正すれば次式：

$$(V + V_0)^2 = K(t + t_0) \quad (1)$$

のように簡単な直線関係となることを見いだした。（図2の②）この式は数学的には微分方程式：

$$J_v A = \frac{dV}{dt} = \frac{K}{2(V + V_0)} \quad (t_0 = V_0^2 / K) \quad (2)$$

の解になっている。（ J_v [m³/(m²·s)]：透過流束， A [m²]：膜面積）これらの式を Ruth の濾過方程式と呼ぶ。デッドエンド濾過において、 K と V_0 という2つの定数（濾過定数）がわかれば、濾過曲線 (V vs. t) を予測することができる。

【例題6】Ruth 式のパラメータ推定<cem06.xls>

式(1)を変形して、

$$V = \sqrt{Kt + V_0^2} - V_0 \quad (3)$$

である。図1中のセルA4:B16にデッドエンド形式の濾過実験データを示す。データは時間 t に対する濾液量 V である。Ruth の濾過方程式(3)にあてはめてパラメータを求めよ。

（解）非線形最小2乗法の問題である。パラメータ K ， V_0 の初期値を C1:C2 に書き，C4:C16 に式(3)の値を計算する。データと計算値の残差2乗和をセルD17とする。ソルバーで目的セルをD17，目標値を最小値，変化させるセルをC1:C2として実行する。濾過定数として $K = 0.00041 \text{ m}^6/\text{h}$ ， $V_0 = 0.000392 \text{ m}^3$ が得られた。

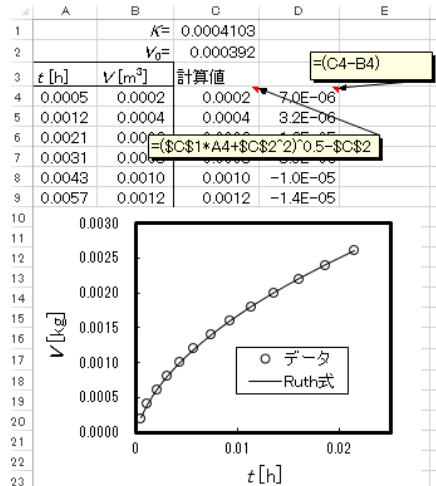


図3 Ruth 式のパラメータ推定<cem06.xls>

Ruth 式における濾過定数は、 K [m⁶/s] がケーキの濾過抵抗を、 V_0 [m³] は濾材の抵抗相当の仮想ケーキ層を形成する濾液量の意味を持つ。つまり濾過の以前にある濾材（膜）の抵抗を、後からできるケーキ層の抵抗を使って表していることになり、この発想の転換が Ruth 式のモデル上の特徴となる。

濾液量 V とケーキ厚さは比例関係にあり、この仮想ケ

ーク厚さを L_m , 実際のケーキ厚さを L_c として, 次式の関係にある。

$$L_m = V_0 C / A \quad (4)$$

$$L_c = VC / A \quad (5)$$

(原液の粒子濃度をケーキ体積基準で C [$\text{m}^3\text{-ケーキ}/\text{m}^3\text{-濾液}$] とする。) すると Ruth 式は L_c 基準で次式のようにも表せる。(k : 比例定数, μ : 水の粘度)

$$\frac{dL_c}{dt} = \frac{C}{A} \frac{dV}{dt} = J_v C = \left(\frac{k\Delta P C}{\mu} \right) \frac{1}{L_c + L_m} \quad (6)$$

3. Ruth 式の展開

前項のデッドエンド濾過に関する Ruth の濾過方程式を展開し, クロスフロー濾過のモデルを考える。

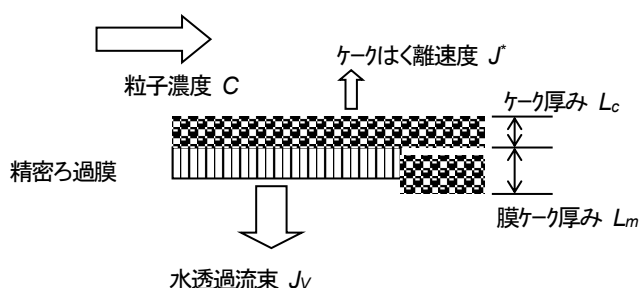


図4 リフト速度 J^* によるクロスフロー濾過のモデル

クロスフロー濾過では膜面流速 u による膜面せん断力によりケーキが剥離する効果が生じる。(図4) これをケーキ剥離速度 (リフト速度) J^*C で表すと, ケーキ層厚さが Ruth 式にこの項を加えて次式となる。

$$\frac{dL_c}{dt} = J_v C - J^* C = \left(\frac{k\Delta P C}{\mu} \right) \left(\frac{1}{L_c + L_m} \right) - J^* C \quad (7)$$

右辺第1項がデッドエンドの Ruth 式と同じ項で, 第2項がクロスフローの効果を表す。なお, ここで濾過流束の初期値は $J_{v0} = k\Delta P / (\mu L_m)$ である。

このリフト速度モデルによると, 透過流束の定常値 J_{∞} は $J_{\infty} C = J^* C$ となり, J_{∞} は圧力によらないことになる。すなわち, 精密濾過における限界透過流束を表している。また, リフト速度は粒子層表面のせん断力に依存するので, 膜面流速 u が大きいとリフト速度も大きく, 従って透過流束も大きくなると予測される。

【例題7】クロスフロー濾過のモデル<cem07.xls>

細孔径 $0.2 \mu\text{m}$ の精密濾過膜を用いて膜面積 60 cm^2 の平膜セルで野菜ジュースのクロスフロー濾過をおこなった。透過流束の経時変化が図6のようであった。濾過圧力 $\Delta P = 0.10 \text{ MPa}$, 純水の透過流束 $J_{v0} = 540 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{h}) = 1.5 \times 10^4$

$\text{m}^3/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$, 定常透過流束 $J_{\infty} = 11.5 \text{ kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{h}) = 3.19 \times 10^{-6} \text{ m}^3/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$, $C = 0.02 \text{ m}^3/\text{m}^3$ である。

(解) 図5のシートでG列にパラメータ, B5に微分方程式を書く。パラメータのうち L_m を仮定して積分を実行する。 $L_m = 5 \times 10^{-7} \text{ m}$ でほぼデータと一致した。得られた L_c の経時変化を式(6)で J_v に換算して図6に示す。クロスフロー濾過ではケーキ剥離速度の効果で, 透過流束が一定値になる。なお, 比較したデッドエンド濾過では時間とともに透過流束が減少し, 最終的に零に近づく。ともに簡単な微分方程式で濾過の過程が表せている。

1	A	B	C	D	E	F	G
1	微分方程式数	1				定数	
2	t=	Lc=	=(G8*G5*G4/G6)/(Jv0=	1.50E-04 n
3	1440.00		2.284E-(B3+G7)-G3*G4			Jv∞=J*=	3.19E-06 n
4		Lc'=				Cb=	0.02 n
5	微分方程式→	4.68E-10				ΔP=	1.00E+05 F
6						μ=	1.00E-03 F
7	積分区間t=[a,	0				Lm=	5.00E-07 n
8	b]	1440	Runge-Kutta			k=	7.5E-19
9	積分刻み幅Δ	10					=G7*G2*G6/G5
10	計算結果						
11	t [s]	Lc[m]		Jv	lv-kg/m2h	h	
12	0	0.00E+00		1.5E-04	540	0.000	
13	10	6.12E-06		1.1E-05	40.76057	0.003	
14	20	7.53E-06		9.3E-06	33.62237	0.006	
15	30	8.64E-06		8.2E-06	29.54585	0.008	
16	40	9.56E-06		7.5E-06	26.83368	0.011	
17	50	1.04E-05		6.9E-06	24.86761	0.014	

図5 クロスフロー濾過のリフト速度モデル<cem07.xls>

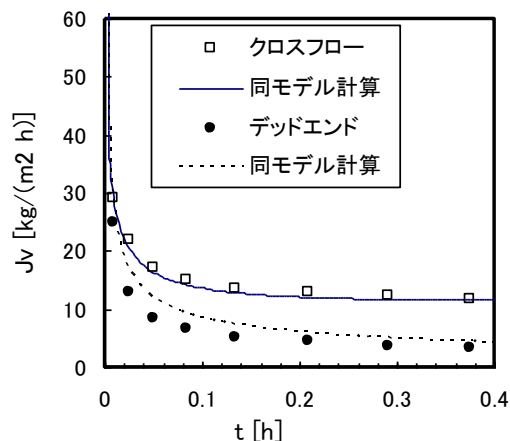


図6 クロスフロー濾過の透過流束

例題のファイルは化学工学会のホームページに掲載されています。ダウンロードしてお試してください。

原典 1) B.F. Ruth, G.H. Montillon and R.R. Montonna: *Ind. Eng. Chem.*, **25**, 76 and 153 (1933).

化学工学トリビア Overall heat transfer coefficient?

伝熱工学におけるこの用語の日本語訳は3系統ある。

- ①「熱通過率」, □「総括熱伝達係数」, □「総括伝熱係数」
「熱伝達」とは Convective heat transfer の機械工学での訳語であり, Heat transfer coefficient を「熱伝達率」とする。さらに「総括 Overall」については機械工学ではなぜか「熱通過率」という別の訳語を使う。このためもあり, 機械工学分野では似た語である「熱伝達(対流)」と「熱伝導」の区別がつかない学生が続出する。

もちろん化学工学では Heat transfer coefficient が「(対流)伝熱係数」, Overall heat transfer coefficient が「総括伝熱係数」と一貫している。

化学工学では普通に「伝熱係数」を使っていればよいところだが, しかし残念ながら, 化学工学でも機械工学の「熱伝達率」に妥協した(?)「熱伝達係数」派が多くなっている。この延長で Overall heat transfer coefficient に(「熱通過率」はさすがになかろうということ)で機械工学にはない「総括熱伝達係数」を造語して使うことにもなる。

実は化学工学便覧も 1978 年の 4 版までは「伝熱係数」だが, 5 版(1988 年)で「熱伝達係数」になって以来, 最新の 7 版まで「熱伝達係数」である。また, ネット上の google で各語句を検索すると, 「熱伝達率」34 万件, 「伝熱係数」15 万件, 「熱伝達係数」137 万件(!)と, もう大勢は「熱伝達係数」に決しているかのようである。

筆者は科内の卒論発表などで「熱伝達係数」が出るたびにクレームをつける頑固教員であるが, 残念ながら孤軍奮闘である。それでも化学工学科が消滅しようとしている現在, 化学工学の砦として言い続けたい。

「Overall heat transfer coefficient は総括伝熱係数です！」

(この件反論歓迎)