

境界層理論とシャーウッド数

1. 対象とするプロセス：層流流れの速度境界層と濃度境界層

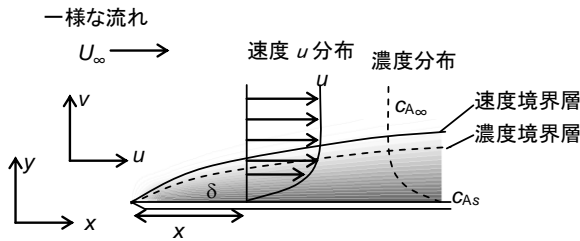


図1 平板上の速度境界層，濃度境界層

強制対流伝熱や強制対流物質移動のモデルは装置内の移動現象に限らず，人体からの放熱や水の蒸発など，身近な現象の解析にも応用でき，有用である。流れ中の固体表面（界面）からの物質移動について，境界層理論によりモデル解析する。

2. 境界層方程式

強制対流物質移動の最も基礎的モデルが平行平板からの物質移動である。(図1)速度 U_∞ の流れに平行に平板がある。平板面上の拡散成分濃度が c_{As} ，流れ中の濃度が $c_{A\infty}$ として，平板上から流れ方向へ物質移動が生じている。現象を支配する速度の境界層，濃度境界層の基礎式が次式である。

速度境界層：

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

(対流項) (粘性項)

濃度境界層：

$$u \frac{\partial c_A}{\partial x} + v \frac{\partial c_A}{\partial y} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \quad (2)$$

(対流項) (拡散項)

(ρ : 流体密度， μ : 粘度， D_{AB} : 拡散係数)

この偏微分方程式を解くためにまず常微分方程式に変換する。 x, y 方向距離を相似変数：

$$\eta = \frac{y}{\delta} = y \sqrt{\frac{U_\infty}{(\mu/\rho)x}}$$

で1次元化する。(δ : 境界層厚さ)

$$\text{流れ関数 } \psi : u \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y}, v \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

を用い，これを η の関数である無次元流れ関数 $f(\eta)$ とする。

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{(\mu/\rho)xU_\infty}}$$

すると元の速度境界層方程式の各項が f で表され，次式の3階の常微分方程式となる。

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (3)$$

(境界条件： $\eta=0: f=f'=0$ ， $\eta=\infty: f'=1$)

$$\theta(\eta) \equiv \frac{c_A - c_{As}}{c_{A\infty} - c_{As}}$$

また，濃度を $\frac{c_A - c_{As}}{c_{A\infty} - c_{As}}$ で無次元化すると，濃度境界層方程式が次式となる。

$$\theta'' + \frac{Sc}{2} f \theta' = 0 \quad (4)$$

$$\left(Sc \equiv \frac{\mu}{\rho D_{AB}} : \text{シュミット数} \right)$$

(境界条件： $\eta=0: \theta=0$ ， $\eta=\infty: \theta=1$)

3. 境界層方程式の数値解

この3階の常微分方程式を数値解法で解くために， $(f), (f'), (f'')$ を別の変数とみなして，正規形の連立常微分方程式にすると次式である。

$$\begin{cases} (f)' = (f') \\ (f')' = (f'') \\ (f'')' = -(1/2) f f'' \end{cases} \quad (5)$$

濃度境界層方程式も同様に，

$$\begin{cases} (\theta)' = (\theta') \\ (\theta')' = -(Sc/2) f (\theta') \end{cases} \quad (6)$$

とする。この連立常微分方程式を以下のように解く。

【例題25】タンパク質の濃度境界層の厚さ
<cem25.xlsm>

壁面からタンパク質が水中に溶解する現象を考える。これは膜濾過（限外濾過）における濃度分極層のモデルでもある。水中のタンパク質（アルブミ

ン)の拡散係数は

$$D_{AB} = 6.81 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}, Sc = 14684 \text{ である。}$$

$U_\infty = 1 \text{ m/s}, x = 0.1 \text{ m}, c_{As} = 100, c_{A\infty} = 0$ として速度・濃度境界層方程式を解き、濃度分布を求めよ。

(解)図2が「微分方程式解法シート」である。セルB5, C5, D5に速度境界層方程式(式(5)), E5, F5に濃度境界層方程式(式(6))を記述し、積分を実行する。無次元速度 f' および温度 θ が積分の上限 $\eta = 8$ で1となるよう、 $f''(0), \theta'(0)$ の値について試行計算をおこなう。その結果、解が $f''(0) = 0.33206, \theta'(0) = 8.29$ と得られた。壁面からの距離 y と速度分布、濃度分布の結果を図3に示す。これより速度境界層の厚さは 0.3 mm 。一方、濃度境界層の厚さは $20 \mu\text{m}$ と非常に薄いことがわかる。

	A	B	C	D	E	F	G
1	微分方程式数	5			=F3	=-(O2/2)*B3*F3	
2	$\eta =$	$f =$	$f' =$	$f'' =$	$\theta =$	$\theta' =$	
3	7.99998664	6.27924	1	1.2E-05	1.000001	-3E-10	
4		$f =$	$f' =$	$f'' =$	$\theta =$	$\theta' =$	
5	微分方程式	1	1E-05	-4E-05	-3.4E-10	1E-05	
6			=C3	=D3	=-(1/2)*B3*D3		
7	積分区間 $\eta =$	0					
8	b)	8	Runge-Kutta-Fehlberg		Sc =	14684	
9	区間分割数	50					
10	計算結果						
11	η	f	f'	f''	θ	θ'	
12	0.000	0	0	0.33206	0.000000	8.2944	
13	0.009	1.3E-05	0.0029	0.33206	0.072676	8.2921	
14	0.017	4.7E-05	0.0056	0.33206	0.139981	8.2782	
15	0.025	0.00011	0.0084	0.33206	0.208816	8.2405	
16	0.033	0.00018	0.0109	0.33206	0.270081	8.1776	

図2 境界層方程式の数値解法<cem25.xlsm>

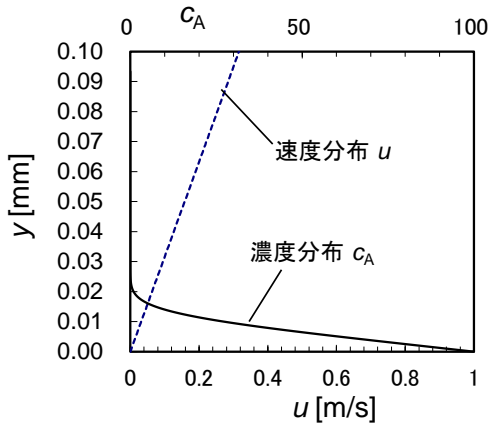


図3 実際の距離による速度分布、濃度分布

4. シャーウッド数 Sh 数による一般化

濃度境界層方程式に f と Sc 数が入っているの
で、濃度分布したがって物質移動速度は速度分

布と Sc 数が支配する。濃度境界層の壁面勾配と Sc 数との関係は、

$$\theta'(0) = 0.332 Sc^{1/3} \quad (7)$$

のように近似できる。(例題 25 の場合、数値解の $\theta'(0) = 8.29$ に対して、 $\theta'(0) = 0.332(14684)^{1/3} = 8.13$ である。)すると、無次元濃度勾配は、

$$\theta'(\eta) = \frac{-1/(c_{As} - c_{A\infty})}{\sqrt{U_\infty/(\mu/\rho)x}} \frac{\partial c_A}{\partial y} = -\frac{x}{(c_{As} - c_{A\infty}) Re_x^{1/2}} \frac{\partial c_A}{\partial y} \quad (8)$$

なので、これより平板面上の物質移動流束 N_A は次式となる。($Re_x \equiv U_\infty \rho x / \mu$)

$$N_A = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial y} \Big|_{y=0} = \left(\frac{D_{AB}}{x} \right) (c_{As} - c_{A\infty}) Re_x^{1/2} \theta'(0) = 0.332 \left(\frac{D_{AB}}{x} \right) (c_{As} - c_{A\infty}) Sc^{1/3} Re_x^{1/2} \quad (9)$$

さらに、平板の全長 L についての平均値は次式である。

$$\bar{N}_A = \frac{1}{L} \int_0^L N_A dx = 0.664 \left(\frac{D_{AB}}{L} \right) (c_{As} - c_{A\infty}) Sc^{1/3} Re_L^{1/2} \quad (10)$$

これをシャーウッド数 Sh で書くと最終的に平板上の平均物質移動速度は次式で表せる。

$$Sh \equiv \frac{\bar{N}_A}{D_{AB}(c_{As} - c_{A\infty})/L} = 0.664 Sc^{1/3} Re_L^{1/2} \quad (11)$$

ここで物質移動係数 k の定義:

$$N_A = k(c_{Ai} - c_{A\infty}) = \frac{D_{AB}}{\delta_c} (c_{Ai} - c_{A\infty}) \quad (12)$$

を考慮すると Sh 数は、

$$Sh \equiv \frac{\bar{N}_A}{D_{AB}(c_{As} - c_{A\infty})/L} = \frac{kL}{D_{AB}} = \frac{L}{\delta_c} \quad (13)$$

である。これより Sh 数は代表長さ L と物質移動境界膜厚さ δ_c の比の意味を持つ。

平板流れに関する式(11)を発展させ、各種形状について物質移動に関する理論および相関式を示す。図4は平行平板流れ、円管内流れ、円柱を横切る流れ、球周りの流れについて代表長さ D, L の定義と物質移動境界膜厚さ δ_c の測り方を示したものである。ここで平行平板流れのみ代表長さ L と境界膜厚さ δ_c の方向が異なる点が特徴である。

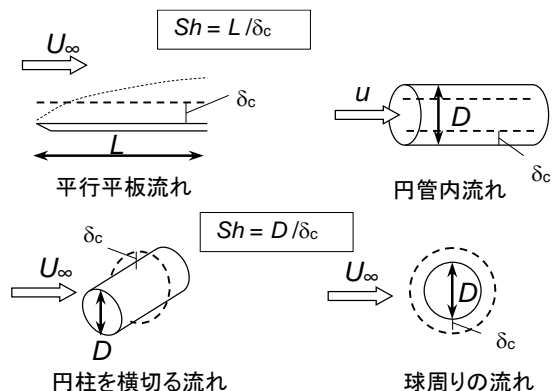


図 4 各形状の流れにおける代表長さや物質移動境膜厚さ δ_c 。

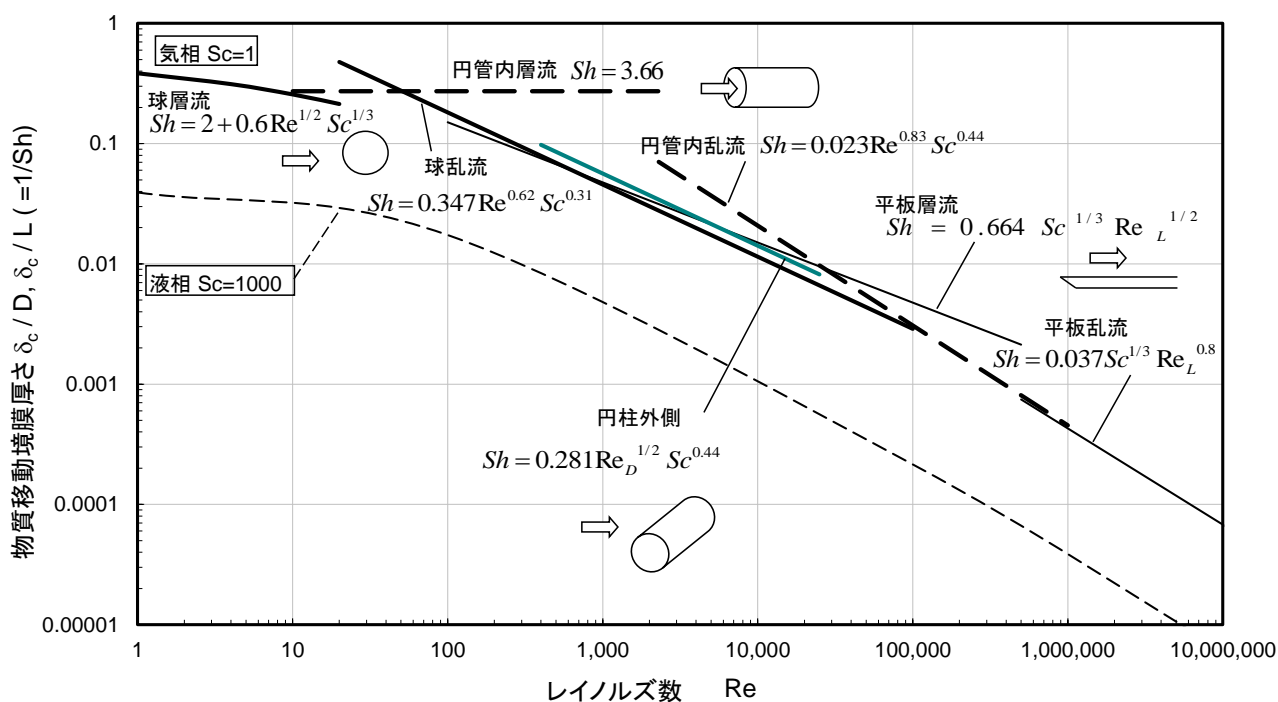


図 5 各種形状物質移動(層流, 乱流)における物質移動境膜厚さの比較¹⁾

以上の基本的な4つの物質移動形態について、層流および乱流における Sh 数の理論解、相関式を、 Sh 数の逆数を取り、物質移動境膜厚さと代表長さの比 ($\delta_c/D, \delta_c/L$) として図 5 に Re 数に対して示した。(式の詳細等は参考文献¹⁾を参照。)これは $Sc=1$ の気相についての概略の境膜厚さである。どの物質移動形態も同様の傾向を示しており、 Re 数の小さい層流範囲では、 δ_c は代表長さの数分の1、流れが速くなると $1/100 \sim 1/1000$ 程度に薄くなる。液相の場合は $Sc=1000$ 程度なので、境膜厚さ δ_c は気相の $1/10 \sim 1/20$ となる。

(例題のファイルは化学工学会のホームページに掲

載されています。ダウンロードしてお試しください。)

参考文献

- 1) 伊東 章: Excel で気軽に移動現象論, p. 150, 丸善出版 (2014).
- 2) Cussler, E.L. : Diffusion, 3rd ed., p. 292, Cambridge Univ. Press (2009).
- 3) Plawsky, J.L. : Transport Phenomena Fundamentals, 3rd ed., p. 562, CRC Press (2014).
- 4) Bird, R.B., W.E. Stewart, E.N. Lightfoot; Transport Phenomena, 2nd ed., p. 389, John Wiley & Sons (2002).
- 5) Baehr, H.D., K. Stephan: Heat and Mass Transfer, Third

edition, p. 347, Springer (2011).

化学工学トリビア: $Sc^{1/3}$ のナゾ

境界層理論から導かれた式(11)は、界面の物質移動流速が $Re^{1/2}$ に比例し、 $Sc^{1/3}$ に比例することを述べている。このうち $Re^{1/2}$ の指数(1/2)は相似性から導かれ、理論的に(1/2)=0.50である。一方 $Sc^{1/3}$ の指数“1/3”のほうはどうか?教科書をあたってみると・・・

Cussler²⁾および Plawsky³⁾は境界層内速度分布、濃度分布に3次式を仮定して、 $\delta_c < \delta$ の条件下で $(\delta/\delta_c) = Sc^{1/3}$ となることを一応証明している。

しかし多くの教科書では $Sc^{1/3}$ は数値計算結果の相関であると説明されている⁴⁾。さらにさすが境界層理論の本場ドイツの教科書⁵⁾には、より厳密な相関式として図6中に示した式が紹介されている。

これと式(7)および本稿の常微分方程式解法シート

による計算結果とを図6で比較した。特に $Sc < 0.1$ で違いが大きくなるが、 $Sc > 1$ では5オーダーに渡り2%以内で一致している。

結局、たまたま指数(1/3)で精度よく近似できるということなのだが、どうにも不思議なことである。

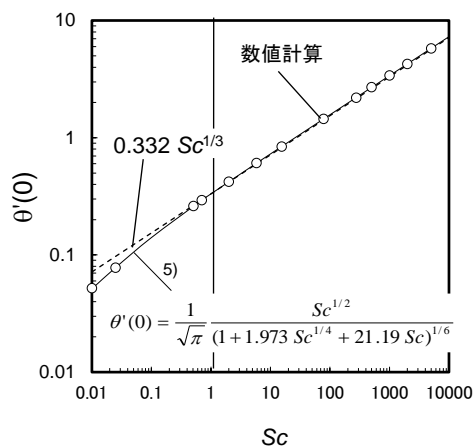


図6 濃度境界層の壁面濃度勾配 $\theta'(0)$